Chapitre 06 : Transformations du plan

I] Triangles semblables

Définition

On dit que deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés ont des longueurs proportionnelles.

Exemple : On considère le triangle ABC tel que : AB = 4 cm, BC = 3 cm et AC = 2 cm ; et le triangle A'B'C' tel que : A'B' = 6 cm, B'C' = 4,5 cm et A'C' = 3 cm.

Longueurs des côtés de ABC	2	3	4
Longueurs des côtés de A'B'C'	3	4,5	6

$\times 1,5$

$\frac{A'C'}{AC}=\frac{3}{2}=1,5$ $\quad \frac{B'C'}{BC}=\frac{4,5}{3}=1,5$

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{6}{4}=1,5$

(on associe les côtés dans l'ordre croissant de leurs longueurs)

Donc, les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Remarques : On note k le coefficient de proportionnalité qui relie les longueurs des deux triangles.

- Si $k > 1$, alors il s'agit d'un agrandissement.
- Si $k < 1$, alors il s'agit d'une réduction.

(le triangle A'B'C' est un agrandissement de rapport 1,5 du triangle ABC)

Propriété Agrandissement, réduction

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport *k*, les longueurs sont multipliées par *k*.

Propriétés Triangles semblables

(1) Si deux triangles sont semblables, alors leurs angles respectifs ont la même mesure.

(2) Si les angles d'un triangle ont la même mesure que les angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

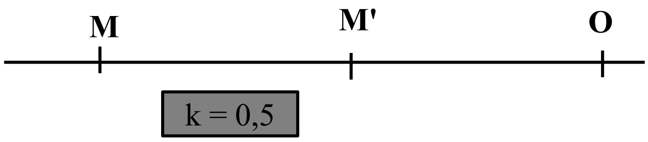
Remarque : pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles de même mesure.

II] <u>Homothétie</u>

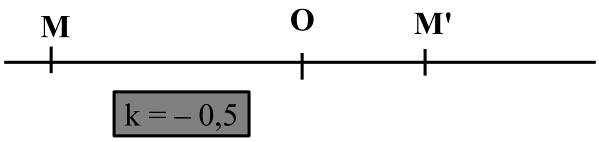
Définition

On appelle homothétie de centre O et de rapport *k* (non nul) la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :
(1) O, M et M' sont alignés

(2) Si $k > 0$, alors OM' = $k \times$ OM
et M et M' sont du même côté par rapport à O

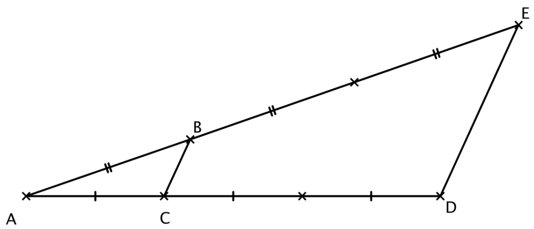


Si $k < 0$, alors OM' = $k \times$ OM
et M et M' sont de part et d'autre de O

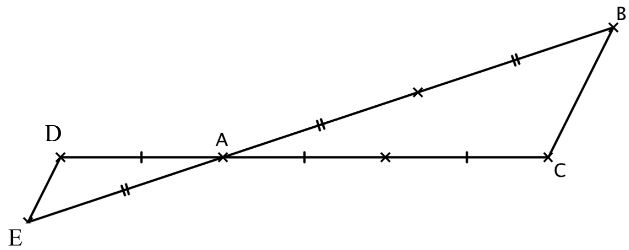


Une homothétie de rapport *k* (où *k* est un nombre relatif non nul) permet d'agrandir ou de réduire une figure à partir d'un point choisi comme centre et de rapport *k* si $k > 0$ ou $-k$ si $k < 0$.

Exemples :



ADE est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport 3.



ADE est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport -0,5.

Construction : D est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport -0,5 signifie que :
– le point C, le centre de l'homothétie A et son image D sont alignés
– AD = 0,5 × AC

Remarque : l'homothétie conserve les angles et le parallélisme

Propriété

L'image d'un triangle par homothétie est un triangle semblable.

Remarque : les longueurs du triangle sont multipliées par le rapport *k* de l'homothétie.

Exemple : Par l'homothétie de centre O et de rapport – 2, l'image du triangle ABC est le triangle A'B'C' tel que : A'B' = 2 × AB, A'C' = 2 × AC et B'C' = 2 × BC.

$$\frac{C'A'}{CA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'B'}{CB}=2 \quad .$$

Donc, ABC et A'B'C' sont semblables.
(Les longueurs de ABC sont multipliées par 2)