

Chapitre 01 : Proportionnalité

I] Compléter un tableau de proportionnalité (Rappels)

Définition

Deux grandeurs sont en situation de proportionnalité lorsque l'on peut passer des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant (ou divisant) par un même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*.

Exemples de grandeurs **proportionnelles** :

- le prix et la masse de miel acheté
- le nombre de bouteilles achetées et leur prix
- le périmètre d'un carré et la longueur de son côté

Exemples de grandeurs **non-proportionnelles** :

- la taille et l'âge
- le poids et l'âge
- l'aire d'un carré et la longueur de son côté

Remarque : pour vérifier qu'un tableau est un tableau de proportionnalité, pour chaque colonne on calcule le quotient du nombre de la seconde ligne par celui de la première.

- Si tous les quotients sont égaux, alors le tableau est de proportionnalité.
- Si l'un des quotients est différent, alors le tableau n'est pas de proportionnalité.

Compléter un tableau de proportionnalité

Le nombre de stylos achetés et le prix payé sont proportionnels.

| | | | | | | | | | |
|--------------|-------------------------|-----|---|------------|------------|------------|-----------|------------|--------------|
| $\times 2,5$ | Nombre de stylos | 3 | 5 | 8 | 19 | 24 | 30 | 1 | $\times 0,4$ |
| | Prix payé (en €) | 1,2 | 2 | 3,2 | 7,6 | 9,6 | 12 | 0,4 | |

♦ Méthode 1 : Retour à l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité

On rajoute la colonne correspondant à 1.

Calcul du prix d'un stylo :

On sait que 3 de ces stylos coûtent 1,20€.

Or, $1,20\text{€} \div 3 = 0,40\text{€}$. Donc, 1 de ces stylos coûte 0,40€.

← Il s'agit aussi du coefficient de proportionnalité qui permet de passer du nombre de stylos au prix payé.

Calcul du prix de 24 stylos :

Comme 1 stylo coûte 0,40€ alors 24 de ces stylos coûtent 24 fois plus cher.

Or, $24 \times 0,40\text{€} = 9,60\text{€}$. Donc, 24 de ces stylos coûtent 9,60€.

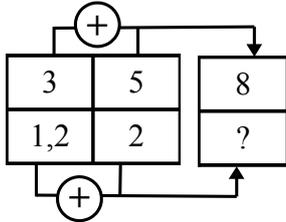
Remarque : $5 \div 2 = 2,5 \rightarrow$ c'est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer du prix payé au nombre de stylos.

♦ Méthode 2 : La linéarité

Rappels

- (1) On peut obtenir une colonne du tableau *en multipliant une colonne par un nombre*.
- (2) On peut obtenir une colonne du tableau *en faisant la somme (ou la différence) d'une ou plusieurs colonnes*.

♦ Calcul du prix de 8 stylos :

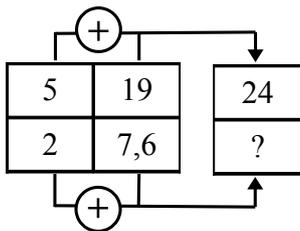


3 stylos coûtent 1,20€ et 5 stylos coûtent 2€.
Or, 8 stylos = 3 stylos + 5 stylos et $1,20€ + 2€ = 3,20€$.
Donc, 8 de ces stylos coûtent 3,20€.

♦ Calcul du prix de 19 stylos :

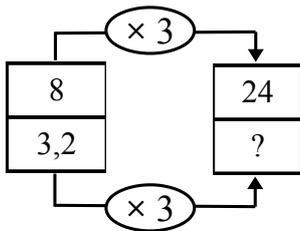
Comme 1 stylo coûte 0,40€, alors 19 stylos coûtent 19 fois plus.
Or, $19 \times 0,40€ = 7,60€$. Donc, 19 de ces stylos coûtent 7,60€.

♦ Calcul du prix de 24 stylos :



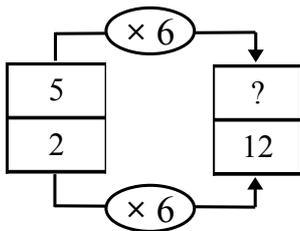
5 stylos coûtent 2€ et 19 stylos coûtent 7,60€.
Or, 24 stylos = 5 stylos + 19 stylos et $2€ + 7,60€ = 9,60€$.
Donc, 24 de ces stylos coûtent 9,60€.

OU



8 stylos coûtent 3,20€.
Or, 24 stylos = 8 stylos $\times 3$ et $3,20€ \times 3 = 9,60€$.
Donc, 24 de ces stylos coûtent 9,60€.

Combien de stylos peut-on acheter avec 12€ ?



Pour 2€, on peut acheter 5 de ces stylos.
Or, $12€ = 2€ \times 6$ et 5 stylos $\times 6 = 30$ stylos.
Donc, avec 12€ on peut acheter 30 de ces stylos.

II] Produits en croix et quatrième proportionnelle

On considère le tableau de proportionnalité suivant :

| | | | |
|------------------|----|----|----|
| Nombre de livres | 3 | 4 | 10 |
| Prix payé (en €) | 24 | 32 | 80 |

On calcule les produits en croix :

| | |
|----|----|
| 3 | 4 |
| 24 | 32 |

| | |
|----|----|
| 4 | 10 |
| 32 | 80 |

| | |
|----|----|
| 3 | 10 |
| 24 | 80 |

$$3 \times 32 = 96$$

$$4 \times 80 = 320$$

$$3 \times 80 = 240$$

$$4 \times 24 = 96$$

$$32 \times 10 = 320$$

$$24 \times 10 = 240$$

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix des termes de deux colonnes sont égaux.

Si

| | |
|---|---|
| a | c |
| b | d |

 est un tableau de proportionnalité, alors $a \times d = b \times c$

Application : Quatrième proportionnelle (calculer une valeur manquante dans un tableau de proportionnalité)

Trouver la valeur de x telle que le tableau :

| | |
|----|---|
| 5 | 9 |
| 12 | x |

 soit un tableau de proportionnalité.

L'égalité des produits en croix donne : $5 \times x = 12 \times 9$. Soit, $x = \frac{12 \times 9}{5}$

II] Graphique et proportionnalité

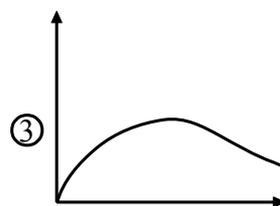
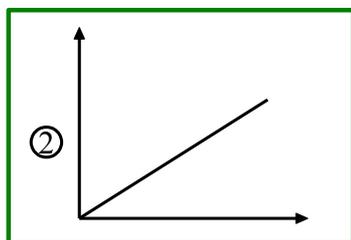
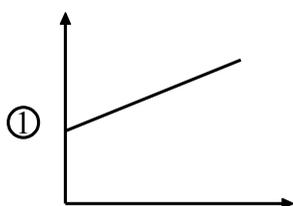
Propriété

Toute situation de proportionnalité se représente dans un repère par des points alignés avec l'origine.

Remarque :

Tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère, représente une situation de proportionnalité.

Exemples :



Seule la situation 2 traduit une situation de proportionnalité

IV] Pourcentages

1) Appliquer un pourcentage

Propriété

Pour appliquer un pourcentage de $a\%$ à une quantité, on la multiplie par la fraction $\frac{a}{100}$.

Exemple :

Dans un collège de 680 élèves, il y a 65% de demi-pensionnaires.
Combien de repas doivent être préparés pour les élèves ?

$$680 \times \frac{65}{100} = 680 \times 0,65 = 442 \quad \text{Il faudra donc que le cuisinier prépare 442 repas pour les élèves.}$$

En calcul mental :

- Appliquer 10% revient à diviser par 10 $\left(\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \right)$
- Appliquer 50% revient à diviser par 2 $\left(\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \right)$
- Appliquer 25% revient à diviser par 4 $\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \right)$

2) Calculer un pourcentage

On a fait geler un volume de 75 cL d'eau et on a obtenu 83 cL de glace.
Quel est le pourcentage d'augmentation du volume ?

Pourcentage de quoi ? *de l'augmentation du volume.* ($83\text{cL} - 75\text{cL} = 8\text{ cL}$)

Pourcentage par rapport à quoi ? *par rapport au volume de départ.* (75 cL)

| | | |
|--------------------------------|----|-----|
| Augmentation de volume (en cL) | 8 | x |
| Volume (en cL) | 75 | 100 |

Pour calculer un pourcentage, il faut comparer avec 100. On ajoute la valeur 100 à la ligne qui correspond au « par rapport à quoi ».

L'égalité des produits en croix donne : $75 \times x = 8 \times 100$. Soit, $x = \frac{8 \times 100}{75} \approx 10,7$ (arrondi au dixième près).

Donc, le volume a augmenté d'environ 10,7%.

3) Evolution en pourcentages

a. Appliquer diminution (ou baisse)

Exemple : Avant les soldes, un jean coûtait 70€. Il est soldé à 30%. Calculer son nouveau prix.

Montant de la baisse : $70\text{€} \times \frac{30}{100} = 70\text{€} \times 0,3 = 21\text{€}$. Donc, le prix va baisser de 21€.

$70\text{€} - 21\text{€} = 49\text{€}$. Ce jean coûte maintenant 49€.

Ne pas oublier d'enlever le montant de la baisse pour obtenir le nouveau prix.

b. Appliquer augmentation (ou hausse)

Exemple : Au premier janvier, un concessionnaire automobile augmente les prix de ses véhicules de 2%. Une voiture coûtait 22 500€ en décembre, quel est son nouveau prix ?

$$\text{Montant de la hausse : } 22\,500 \text{ €} \times \frac{2}{100} = \frac{22\,500 \text{ €} \times 2}{100} = \frac{22\,5 \text{ €} \times \cancel{100} \times 2}{\cancel{100}} = 225 \text{ €} \times 2 = 450 \text{ €} .$$

Donc, le prix va augmenter de 450€.

22 500€ + 450€ = 22 950€. Donc, à partir du premier janvier, cette voiture coûtera 22 950€.



Ne pas oublier d'ajouter le montant de la hausse pour obtenir le nouveau prix.

c. Calculer un pourcentage de baisse

Exemple : Un article qui coûtait 60€ est soldé à 45€. A quel pourcentage cet article a-t-il été soldé ?

Pourcentage de quoi ? de la baisse (60€ – 45€ = 15€)

Pourcentage par rapport à quoi ? par rapport au prix de départ (60€)

| | | |
|----------------------|----|------------|
| Baisse (en €) | 15 | x |
| Prix (en €) | 60 | 100 |

L'égalité des produits en croix donne : $60 \times x = 15 \times 100$. Soit, $x = \frac{15 \times 100}{60} = 25$

Donc, cet article a été soldé à 25%.

d. Enchaîner les pourcentages

Exemple : un jeu coûte 60€ en mars. Son prix baisse de 10% en avril. Puis son prix augmente de 10% en mai. Quel est son prix en mai ?

Prix en avril : 10% de 60€ : $60 \text{ €} \div 10 = 6 \text{ €}$ et $60 \text{ €} - 6 \text{ €} = 54 \text{ €}$. Donc, le jeu coûtera 54€ en avril.

Prix en mai : 10% de 54€ : $54 \text{ €} \div 10 = 5,40 \text{ €}$ et $54 \text{ €} + 5,40 \text{ €} = 59,40 \text{ €}$.

Donc, le jeu coûtera 59,40€ en mai.



Attention : on ne peut pas ajouter les pourcentages.

(les 10% en mai, ne sont pas pris sur la même valeur que les 10% en avril)