

Chapitre 07 : Les solides

Le « volume d'un solide » est le nombre de cubes (dont les arêtes mesurent 1 unité de longueur) nécessaires pour le remplir complètement.

Unités de volume

➤ Le mètre cube (m^3) est l'unité de volume usuelle, c'est le volume d'un cube d'arête de 1 m.

Les multiples et sous-multiples du m^3 sont:

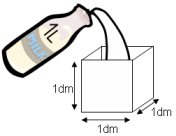
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$\underbrace{\hspace{10em}}$ Multiples du m^3				$\underbrace{\hspace{10em}}$ Sous-multiples du m^3		

Remarque : dans un cube d'arêtes 1 m, il y a 1 000 cubes d'arêtes 1 dm. On a donc : $1 m^3 = 1\,000 dm^3$.

$\div 1\,000$ $\times 1\,000$

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
									5	7	5	0	0	0	0	0	0			
					0,	6	5	2	1											

➤ Le litre (L) est l'unité de volume utilisée au quotidien, c'est le volume d'un cube d'arêtes 1 dm.



Les multiples et sous-multiples du L sont:

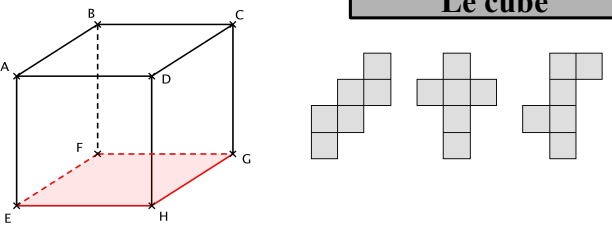
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
$\underbrace{\hspace{10em}}$ Multiples du L				$\underbrace{\hspace{10em}}$ Sous-multiples du L		

Remarque : on a l'équivalence suivante entre m^3 et L : $1 L = 1 dm^3$

- Exemples :
- (1) $575 m^3 = 575 \times 1\,000 dm^3 = 575\,000 dm^3 = 575\,000 \times 1\,000 cm^3 = 575\,000\,000 cm^3$.
 - (2) $652,1 dam^3 = 652,1 \div 1\,000 hm^3 = 0,6521 hm^3$.
 - (3) $45 L = 45 \times 10 dL = 450 dL = 450 \times 10 cL = 4\,500 cL$.
 - (4) $598 mL = 598 \div 1\,000 L = 0,598 L = 0,598 dm^3 = 0,598 \times 1\,000 dm^3 = 598 mm^3$.

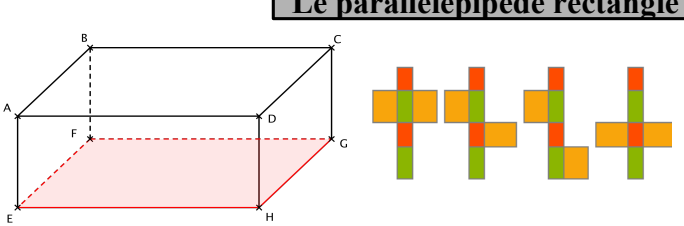
I] Rappels

Le cube



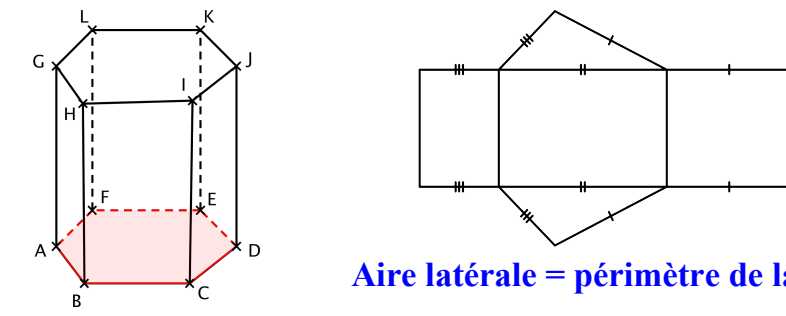
Volume = arête × arête × arête
= Aire de la Base × hauteur

Le parallélépipède rectangle



Volume = Longueur × largeur × hauteur
= Aire de la Base × hauteur

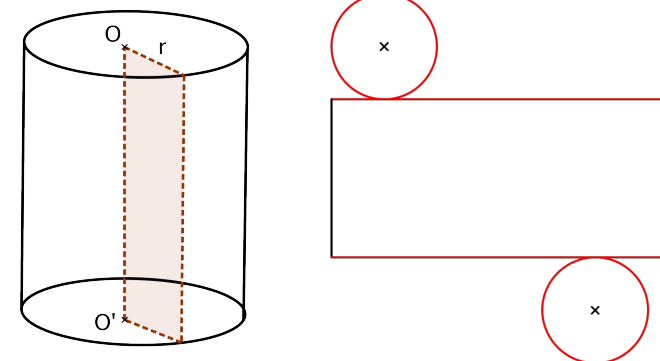
Le prisme droit



Un patron d'un prisme droit est constitué de :
 – deux polygones superposables (les bases)
 – des rectangles (les faces latérales)

Aire latérale = périmètre de la base × hauteur
Volume = Aire de la Base × hauteur

Le cylindre de révolution

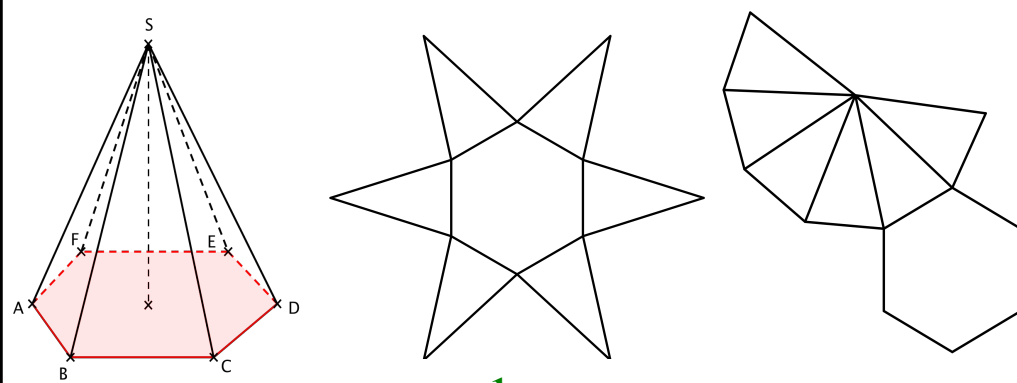


Un patron d'un cylindre de révolution est constitué de :
 – deux disques de diamètre le diamètre de la base
 – d'un rectangle de dimensions : la hauteur du cylindre et le périmètre de la base

Les deux bases sont en contact avec les côtés de la surface latérale qui ont pour dimension le périmètre de la base.

Aire latérale = périmètre de la base × hauteur = $\pi \times \text{diamètre base} \times \text{hauteur}$
Volume = Aire de la Base × hauteur = $\pi \times \text{rayon} \times \text{rayon} \times \text{hauteur}$

Les pyramides



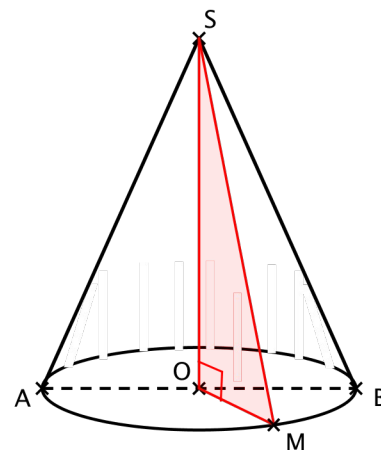
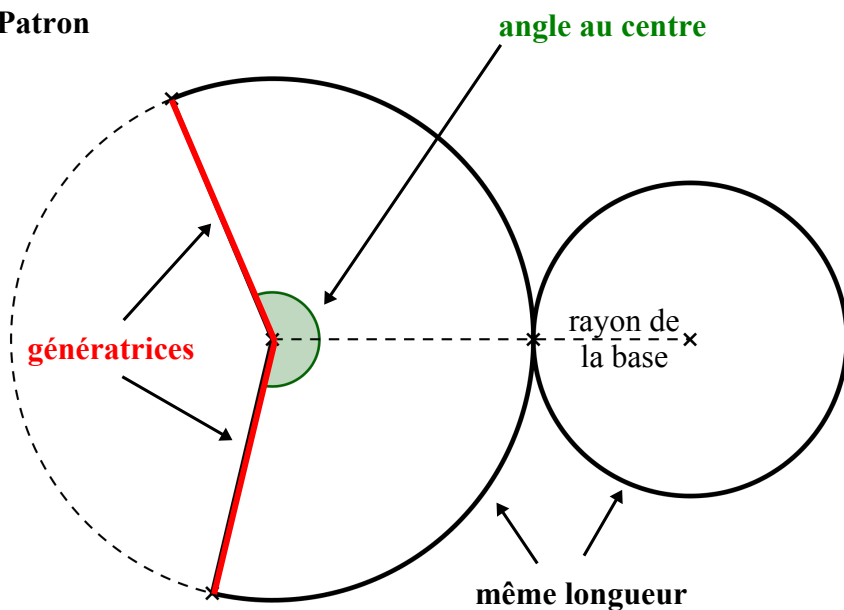
Les deux figures ci-contre correspondent au patron d'une pyramide régulière à base hexagonale.

Elles sont constituées d'un hexagone régulier (tous les côtés ont la même longueur) et de six triangles isocèles superposables.

Volume = $\frac{1}{3} \times \text{Aire de la Base} \times \text{hauteur}$

III] Le cône de révolution

■ Patron



– **Longueur de l'arc de la section circulaire** : la longueur de l'arc est égale à la longueur du cercle de base.

$$\mathcal{P}_r = 2 \times \pi \times \text{diamètre} = 2 \times \pi \times \text{rayon}$$

– **Angle au centre** : **l'angle au centre et la longueur de l'arc sont deux grandeurs proportionnelles.**

Angle	x	360°
Longueur	$2 \times \pi \times \text{rayon base}$	$2 \times \pi \times g$

où g est la longueur d'une génératrice.

longueur du cercle qui prolonge la section circulaire
(c'est un cercle de rayon la génératrice)

Exemple : Calculer l'angle de la section circulaire du patron d'un cône de génératrice 5 cm et de rayon 3 cm.

Angle	x	360°
Longueur	$2 \times \pi \times 3$	$2 \times \pi \times 5$

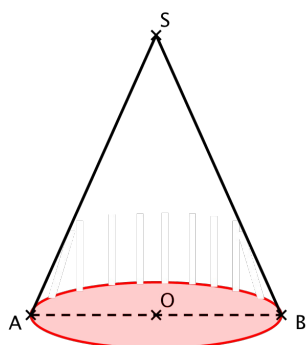
L'égalité des produits en croix donne :

$$x \times 2 \times \pi \times 5 = 360 \times 2 \times \pi \times 3$$

$$\text{Donc, } x = \frac{360 \times 2 \times \pi \times 3}{2 \times \pi \times 5} = \frac{360 \times 3}{5} = 72 \times 3 = \mathbf{226^\circ}$$

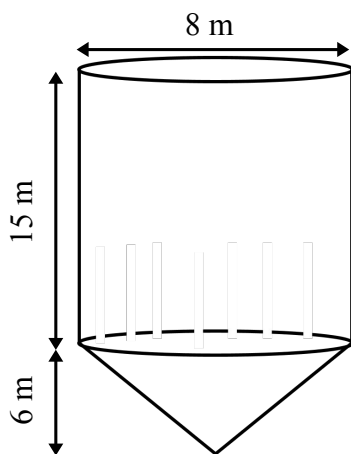
Donc pour construire le patron de cône, il faudra construire un angle de 226° pour la section circulaire.

■ Volume



$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \text{rayon} \times \text{rayon} \times \text{hauteur} \end{aligned}$$

Exemple : Calculer le volume d'eau, en L, que peut contenir ce réservoir.



Ce réservoir est constitué d'un cylindre et d'un cône.

Volume du cylindre :

$$\text{Aire de la base : } A = \pi \times \text{rayon} \times \text{rayon} = \pi \times 4 \times 4 = 16\pi \text{ m}^2.$$

$$\text{Volume : } V_1 = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = 16\pi \times 15 = \mathbf{240\pi \text{ m}^3}.$$

Volume du cône :

$$\text{Aire de la base : } A = 16\pi \text{ m}^2. \leftarrow \text{c'est la même base que pour le cylindre}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume : } V_2 &= \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times 16\pi \times 6 \\ &= 16\pi \times 2 = \mathbf{32\pi \text{ m}^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } V &= V_1 + V_2 = 240\pi + 32\pi = 272\pi \text{ m}^3 \approx 854,513 \text{ m}^3 \text{ (arrondi au dm}^3 \text{ près)} \\ &= 854\,513 \text{ dm}^3 = \mathbf{854\,513 \text{ L}}. \end{aligned}$$

Donc, ce réservoir peut contenir environ 854 513 L d'eau.

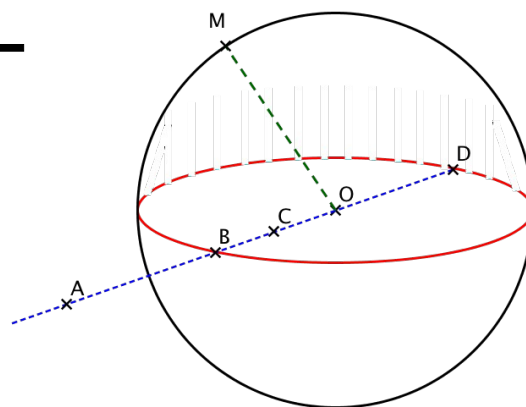
III] La sphère et la boule

Définitions

Sphère et boule

Soit O un point de l'espace et r un nombre positif.

- (1) La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.
- (2) Un grand cercle de la sphère est un cercle de centre O et de rayon r .
- (3) La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$.



Exemple : dans la figure ci-dessus :

- cette sphère a pour centre O et pour rayon MO
- le segment $[BD]$ est un diamètre de la sphère, les points B et D sont dits diamétralement opposés
- les points O , A et C n'appartiennent pas à cette sphère
- les points M , B et D appartiennent à la sphère
- les points M , C , O , B et D appartiennent à la boule
- le point A n'appartient pas à la boule.

Remarques :

- Une sphère est une surface. Elle est « creuse ».
- Une boule est un solide. Elle est « pleine ».

! Attention, une sphère n'a pas de patron !

■ **Aire** : L'aire d'une sphère de rayon r est donné par la formule suivante : **$A = 4\pi r^2$** .

■ **Volume** : Le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule suivante : **$V = \frac{4\pi r^3}{3}$** .