

Chapitre 15 : Proportionnalité (2^{ème} partie)

I] Pourcentages

1) Appliquer un pourcentage

Propriété

Pour appliquer un pourcentage de $a\%$ à une quantité, on la multiplie par la fraction $\frac{a}{100}$.

Exemple :

Dans un collège de 680 élèves, il y a 65% de demi-pensionnaires.
Combien de repas doivent être préparés pour les élèves ?

$$680 \times \frac{65}{100} = 680 \times 0,65 = 442 \quad \text{Il faudra donc que le cuisinier prépare 442 repas pour les élèves.}$$

En calcul mental :

- Appliquer 10% revient à diviser par 10 $\left(\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \right)$
- Appliquer 50% revient à diviser par 2 $\left(\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \right)$
- Appliquer 25% revient à diviser par 4 $\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \right)$

2) Calculer un pourcentage

➤ A l'aide d'une fraction

Propriété

Calculer un pourcentage revient à écrire une proportion (ou une fraction) de dénominateur 100.

Exemple : Dans une classe de 25 élèves, 19 élèves ont un téléphone portable.

$$\frac{19}{25} = \frac{19 \times 4}{25 \times 4} = \frac{76}{100} = 76\% \quad \text{ou} \quad \frac{19}{25} = 0,76 = \frac{76}{100} = 76\%$$

Donc, ces 19 élèves représentent 76% de la classe.

➤ A l'aide d'un tableau de proportionnalité

Dans un collège, parmi les 160 élèves de 5^{ème}, 104 sont externes.
Quel pourcentage de ces élèves sont externes ?

Pourcentage de quoi ? *d'élèves externes* (104 élèves)

Pourcentage par rapport à quoi ? *par rapport aux élèves de 5^{ème}*. (160 élèves)

Nombre d'élèves externes	104	$x = ?$
Nombre d'élèves de 5 ^{ème}	160	100

Pour calculer un pourcentage, il faut comparer avec 100. On ajoute la valeur 100 à la ligne qui correspond au « par rapport à quoi ».

L'égalité des produits en croix donne : $160 \times x = 104 \times 100$. Soit, $x = \frac{104 \times 100}{160} = 65\%$.

Donc, 65% des élèves de 5^{ème} de ce collège sont externes.

Remarque : 35% des élèves sont donc internes ($100\% - 65\% = 35\%$).

II] Echelles

Définition

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le plan et les distances réelles, exprimées avec la même unité : $\frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$

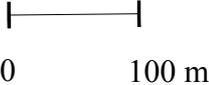
Remarque :

Une échelle est souvent représentée par une fraction dont le numérateur ou le dénominateur est égal à 1.

Exemples :

▪ Utiliser une échelle

(1) Une échelle de $\frac{1}{10\,000}$ signifie que 1 cm sur le dessin représente 10 000 cm (soit 10 m) dans la réalité.

Cette échelle se représente par le schéma suivant : 

(2) Une échelle de $\frac{2}{1}$ signifie que 1 cm sur le dessin représente 2 cm dans la réalité.

(3) Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$, la distance entre deux villes est de 86 cm.

Quelle distance sépare ces deux villes en réalité ?

L'échelle $\frac{1}{250\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 250 000 cm en réalité, soit 2,5 km.

Distance sur le plan (en cm)	1	86
Distance en réalité (en km)	2,5	$x = ?$

Diagramme illustrant la relation de proportionnalité : une flèche circulaire au-dessus du tableau indique un facteur de multiplication $\times 86$ passant de 1 à 86. Une flèche circulaire en dessous indique un facteur de multiplication $\times 86$ passant de 2,5 à $x = ?$.

Donc, $x = 2,5 \text{ km} \times 86 = 215 \text{ km}$.

Donc, ces deux villes sont séparées en réalité de 215 km.

▪ Calculer une échelle

(4) La tour Eiffel mesure 324 m de haut. Un modèle réduit mesure 18 cm.

Quelle est l'échelle de ce modèle réduit ?

Méthode 1

On convertit les longueurs dans la même unité :

$$324 \text{ m} = 324 \times 100 \text{ cm} = 32\,400 \text{ cm}.$$

$$\frac{18}{32\,400} = \frac{2 \times 9}{2 \times 16\,200} = \frac{9}{16\,200} = \frac{9 \times 1}{9 \times 1\,800} = \frac{1}{1\,800}$$

Ce modèle réduit est à l'échelle $\frac{1}{1\,800}$.

Méthode 2

18 cm représentent 324 m en réalité.

1 cm représente $324 \div 18 = 18 \text{ m} = 1\,800 \text{ cm}$ en réalité.

Donc ce modèle réduit est à l'échelle $\frac{1}{1\,800}$

Remarques :

- Si l'échelle est un nombre inférieur à 1, le dessin est une **réduction**.
- Si l'échelle est un nombre supérieur à 1, le dessin est un **agrandissement**.